На правах рукописи

Цепаев Алексей Викторович

МЕТОДЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

05.13.18 - Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2008

Работа выполнена в Институте механики и машиностроения КазНЦ РАН

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Мазуров Петр Алексеевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Бадриев Ильдар Бурханович

доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Копысов Сергей Петрович

Ведущая организация: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (г.Москва)

Защита состоится «04» декабря 2008 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 212.081.21 в Казанском государственном университете по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлёвская, 18, корп. 2, ауд. 218.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета

Автореферат разослан «03» ноября 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д 212.081.21

д.ф.-м.н. Задворнов О.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. С развитием компьютерной техники появилась возможность использования многопроцессорных вычислительных систем для решения сложных математических задач. К таким задачам относятся трехмерные задачи математической физики в областях сложной геометрии. При их численном решении сеточными методами возникают системы уравнений большой размерности. Одним из эффективных подходов к численному решению таких задач является подход, основанный на разделении решаемой задачи на подзадачи на основе методов декомпозиции области. Эти методы являются основой для построения параллельных алгоритмов. Разработка новых параллельных алгоритмов и создание комплексов программ для их реализации на многопроцессорных вычислительных системах является актуальной задачей.

Диссертация посвящена численному решению трехмерных задач фильтрации жидкости в нефтяных и водоносных пластах, вскрытых системой скважин. Применение методов декомпозиции области к таким задачам является мотивированным подходом.

Цели диссертационной работы:

- разработка методов декомпозиции области для численного решения трехмерных задач фильтрации жидкости в областях сложной геометрии;
- построение алгоритмов, основанных на методах декомпозиции области, и их реализация на многопроцессорных вычислительных системах;
- численное тестирование алгоритмов с использованием различного числа процессоров при решении прикладных задач.

Научная новизна результатов.

Разработаны два новых метода декомпозиции области для решения трехмерных задач фильтрации жидкости. Первый – для определения поля давления, второй – для определения поля насыщенности. Предложенные методы протестированы на многопроцессорных вычислительных системах при численном решении задач:

- напорной однофазной фильтрации, подчиняющейся линейному закону Дарси и нелинейному закону Форхгеймера;
- напорно-безнапорной фильтрации;
- двухфазной и трехфазной фильтрации.

Достоверность полученных результатов обеспечивается корректным применением моделей механики сплошной среды и методов вычислительной математики, а также их сравнением с решениями поставленных задач классическими методами.

Практическая ценность. Предложенные методы применимы для решения важных практических задач фильтрации жидкости, в том числе задач нефтедобычи, экологии и т.д. Они имеют общий характер и могут быть использованы при численном решении краевых задач с большим числом особенностей, требующих сгущения сетки.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на XI международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2001, Москва-Истра, 2001), IV научно-практической конференции молодых ученых и специалистов Республики Татарстан (Казань, 2001), VIII Четаевской международной конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением» (Казань, 2002), конференции «Современные проблемы гидрогеологии и гидромеханики» (Санкт-Петербург, 2002), Всероссийской конференции «Высокопроизводительные вычисления и технологии (ВВТ-2003)» (Ижевск, 2003), XVII сессии международной школы по моделям механики сплошной среды (Казань, 2004), международном семинаре «Супервычисления и математическое моделирование» (Саров, 2006), итоговых научных конференциях КазНЦ РАН, на семинарах Института механики и машиностроения КазНЦ РАН.

Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН "Параллельные вычисления на многопроцессорных вычислительных системах".

Структура диссертационной работы. Диссертация состоит из введения, пяти разделов, выводов и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 97 страниц, включая 18 таблиц и 23 рисунков.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 12 работ, список которых приведен в конце автореферата.

СТРУКТУРА И КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Во **введении** дается обзор литературы, формулируются цели исследования и положения, выносимые на защиту.

В **первом разделе** рассматривается трехмерная задача напорной фильтрации жидкости, подчиняющейся линейному закону Дарси. Строится алгоритм решения уравнения для напора на сетках со сгущающимися участками, основанный на методе декомпозиции области.

В **п. 1.1** даётся постановка задачи. Необходимо определить поле напора h в ограниченной области D из решения уравнения

$$\operatorname{div} K \operatorname{grad} h = 0 \tag{1.1}$$

при граничных условиях

$$h = H_0 \text{ на } \Gamma_1, \tag{1.2}$$

$$-K\,\partial h/\partial n = q_{\Gamma n} \text{ на } \Gamma_2, \tag{1.3}$$

$$-\int_{S_k} K\,\partial h/\partial n\,ds = Q_k \text{ при } h|_{S_k} = \mathrm{const} \text{ или } h|_{S_k} = H_k,\ k = 1,\dots,N, \tag{1.4}$$

где $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ - внешняя граница области D, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$, K - коэффициент фильтрации, S_k - суммарная поверхность интервалов вскрытия k-ой скважины, H_0 и H_k - заданные напоры, $q_{\Gamma n}$ - заданное значение нормальной составляющей скорости фильтрации, Q_k - расход k-ой скважины, N –число скважин. Уравнения (1.1)-(1.4) описывают напорную однофазную стационарную фильтрацию, подчиняющуюся закону Дарси.

В **п. 1.2** строится разбиение области решения задачи на подобласти. Для области D имеем следующие соотношения: $\overline{D}=\overline{D}_0 \cup (\bigcup_{k=1}^{N} \overline{D}_k)$, $D_i \cap D_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\overline{D}_0 \cap \overline{D}_k = \gamma_k$, где D_k - прискважинные подобласти. Определим области V_k как области интервалов вскрытия скважин. Объединение $\bigcup_{k=1}^{N} V_k$ является дополнением многосвязной области D до односвязной. Поверхности интервалов вскрытия являются внутренними границами области D. Весь пласт, как односвязная область, покрывается грубой сеткой. От узлов грубой сетки, расположенных на граничной поверхности прискважинных подобластей γ_k, строятся сетки, сгущающиеся к интервалам вскрытия скважин. Грубая сетка вне сгущающихся участков является основной грубой сеткой, а грубые сетки ω_k на сгущающихся участках считаются дополнительными грубыми сетками. Грубая сетка вне сгущающихся участков и сетки, сгущающиеся к интервалам вскрытия скважин, образуют сетку Ω, в узлах которой требуется определить сеточную функцию h_Ω из решения системы (1.1)-(1.4). Без декомпозиции области решение h определяется на сетке Ω. В предлагаемом методе с декомпозицией области решение h в области D_0 представляется как h_1, а в областях D_k представляется в виде суммы двух решений: одно h_{2k} определено в узлах сгущающегося участка сетки, другое h_{3k} - в узлах дополнительной грубой сетки ω_k в области $D_k \cup \overline{V}_k$.

В **п. 1.3** описывается схема метода решения задачи, основанного на декомпозиции области. Для описания схемы используются сеточные шаблоны и балансовые уравнения для узлов граничных поверхностей γ_k.

В **п. 1.4** строится алгоритм решения задачи в общем случае на основе предлагаемого метода декомпозиции области. Даются постановки задач для h_1, h_{2k}, h_{3k}. Решения h_1, h_{2k} и h_{3k} при известных граничных значениях $h_{\Gamma_{1k}}$, $h_{\Gamma_{2k}}$, $h_{\Gamma_{3k}}$ на γ_k независимо определяются из соответствующих систем уравнений. При выполнении условий на границах раздела γ_k относительно напоров $h_{\Gamma_{1k}} = h_{\Gamma_{2k}} + h_{\Gamma_{3k}}$ и относительно нормальных составляющих скоростей фильтрации $q_{1kn} + q_{2kn} + q_{3kn} = 0$ для определения решений h_1, h_{2k}, h_{3k} достаточно задания граничных значений $h_{\Gamma_{3k}}$. При значениях $h_{\Gamma_{3k}} = 0$ система уравнений эквивалентна исходной системе уравнений. Для решения соответствующих систем уравнений строится итерационный процесс. С увеличением номера итерации i значения h_{3k}^i стремятся к нулю, и i-ое приближение напора, определяемое решением h_1^i во внескважинной области и решениями h_{2k}^i в прискважинных подобластях, стремится к решению системы (1.1)-(1.4).

Данный алгоритм для определения напора можно записать в виде:

1) В начальном приближении $h_{2k}^0 = 0$, а h_1^0 и h_{3k}^0 совместно определяются на грубой и дополнительных грубых сетках из решения системы (1.1)-(1.4).

2) На i-ой итерации независимо решаются системы уравнений на сгущающихся участках для определения h_{2k}^i при граничных условиях $h_{\Gamma_{2k}}^i = h_{\Gamma_{2k}}^{i-1} + h_{\Gamma_{3k}}^{i-1}$ на границах γ_k с учетом условия (1.4).

3) Совместно определяются решения h_1^i, h_{3k}^i на грубой и дополнительных грубых сетках с условиями $q_{1kn}^i + q_{2kn}^i + q_{3kn}^i = 0$ и $h_{\Gamma_{2k}}^i = h_{\Gamma_{2k}}^i + h_{\Gamma_{3k}}^i$ на границах раздела γ_k без учета (1.4).

В **п. 1.5** приводятся результаты численных экспериментов. Рассматривался пятислойный пласт с различными толщинами слоев и коэффициентами фильтрации. Пласт считался непроницаемым за исключением кровли, на которой задавалось граничное условие 2-го рода q_n=3.4×10^{-4} м/сут, и противоположных участков боковой поверхности пятого слоя с граничными условиями 1-го рода $H_0 = 10$ м и $H_0 = 40$ м. Для аппроксимации уравнений использовался метод Галеркина, полученная система алгебраических уравнений решалась методом сопряженных градиентов с предобуславливающей матрицей, построенной с помощью неполного разложения Холесского. Задачи решались на многопроцессорной вычислительной системе МВС-1000. В табл. 1 приведено время решения задач с различным числом скважин, полученное алгоритмом с декомпозицией области (различное число процессоров) и без декомпозиции области (один процессор). В обоих случаях под решением понимается определение сеточной функции h_Ω с одной и той же заданной точностью.

Таблица 1. Время решения задач при заданных расходах на скважинах.

Число скважин	Число узлов	Число процессоров	Решение задачи с декомпозицией области	Решение задачи без декомпозиции области
1	15978	1	17сек	16сек
10	46866	1	1мин 21сек	1мин 25сек
		5	55сек	
50	184146	1	4мин 57сек	9мин 26сек
		5	2мин 05сек	
		14	1мин 50сек	
100	355746	1	12мин 45сек	176мин 36сек
		5	5мин 14сек	
		14	2мин 25сек	

Показана эффективность предложенного алгоритма с декомпозицией области при решении задач с большим числом сгущающихся участков сетки по сравнению с алгоритмом без декомпозиции области. При решении задачи со ста скважинами без декомпозиции области время решения резко возрастает, что объясняется нехваткой оперативной памяти компьютера и использованием памяти на жестком диске.

Во **втором разделе** рассматривается решение трехмерной задачи напорной фильтрации жидкости, подчиняющейся нелинейному закону Форхгеймера.

В **п. 2.1** дается постановка задачи. Пласт считается напорным, ограниченным, фильтрационное течение стационарным, однофазным. В случае, когда значение числа Рейнольдса Re больше критического значения $\mathrm{Re}_{кр}$, закон Дарси нарушается и фильтрационное течение описывается двучленным нелинейным законом Форхгеймера $\operatorname{grad} h = -(A + Bv)\mathbf{v}$, где $A = 1/K$, K - коэффициент фильтрации, v - модуль вектора скорости фильтрации $\mathbf{v}$, B - константа пористой среды. Задача решается в следующей постановке: требуется определить поле напора h в области D из решения системы уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ в } D, \tag{2.1}$$

$$\operatorname{grad} h = -(A + Bv)\mathbf{v} \text{ в } G_k,\ k = 1,\dots,N, \tag{2.2}$$

$$K \operatorname{grad} h = -\mathbf{v} \text{ в } D \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{N} G_k \right) \tag{2.3}$$

при граничных условиях

$$h = H_0 \text{ на } \Gamma_1, \tag{2.4}$$

$$v_n = v_{\Gamma n} \text{ на } \Gamma_2, \tag{2.5}$$

$$\int_{S_k} v_n ds = Q_k \text{ при } h|_{S_k} = \mathrm{const} \text{ или } h|_{S_k} = H_k,\ k = 1,\dots,N, \tag{2.6}$$

где $G_k = \{x \in D_k \mid \mathrm{Re}(v) > \mathrm{Re}_{кр}\}$ - области выполнения нелинейного закона фильтрации, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ - внешняя граница области D, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$, S_k - суммарная поверхность интервалов вскрытия k-ой скважины, H_0 и H_k - заданные напоры, $\mathbf{v}$ - скорость фильтрации, v_n - нормальная составляющая скорости фильтрации, $v_{\Gamma n}$ - заданное значение нормальной составляющей скорости фильтрации, Q_k - расход k-ой скважины, N - число скважин. Границы областей G_k заранее неизвестны и должны определяться в процессе решения. В постановке задачи предполагается $\overline{G}_k \subset D_k$. В случае нарушения этого условия границы прискважинных зон D_k могут быть расширены вплоть до общих границ ($D_0 = \varnothing$).

В **п. 2.2** строится итерационный алгоритм решения поставленной задачи без декомпозиции области на сетках, сгущающихся в прискважинных зонах. На i-ой итерации решается задача фильтрации, в которой область применения нелинейного закона фильтрации G_k^{i-1} берётся с предыдущего шага. Затем формируются области G_k^i, которые состоят из конечных элементов, где числа Рейнольдса $\mathrm{Re}(v)$ больше критического значения $\mathrm{Re}_{кр}$. Итерационный процесс останавливается в случае выполнения условия G_k^{i-1} = G_k^i и достижения заданной точности решения системы уравнений.

В **п. 2.3** строится итерационный алгоритм решения задачи, основанный на изложенном в **п. 1.4** методе декомпозиции области. В каждой прискважинной подобласти решение представляется в виде суммы двух решений. Одно решение определено на сгущающейся сетке, другое - на дополнительной грубой сетке. Независимо решаются системы уравнений для сгущающихся участков сетки, затем совместно решается система уравнений для основной и дополнительных грубых сеток. При решении задач на сгущающихся участках определяются подобласти G_k по алгоритму, описанному в **п. 2.2**. На дополнительных грубых сетках используется линейный закон фильтрации.

В **п. 2.4** приводятся результаты численных экспериментов. Рассматривался пятислойный пласт с различными толщинами слоев и коэффициентами фильтрации. Задача решалась с использованием закона Форхгеймера при различных критических числах Рейнольдса с заданными на скважинах расходами и напорами. В табл. 2 приведено время решения задач фильтрации при заданных расходах на скважинах. Расчеты проводились на многопроцессорной вычислительной системе МВС-1000.

Таблица 2. Время решения нелинейных задач фильтрации жидкости при заданных расходах на скважинах при $\mathrm{Re}_{кр} = 0.01$.

Число скважин	Число узлов	Число процессоров	Решение задачи с декомпозицией области	Решение задачи без декомпозиции области
1	15978	1	40сек	2мин
10	46866	1	5мин	18мин
		5	1мин 30сек	
		10	1мин	
50	184146	1	28мин	160мин
		5	6мин	
		10	4мин	
100	355746	1	85мин	440мин
		5	21мин	
		10	13мин	

В **третьем разделе** рассматривается задача фильтрации жидкости в пласте вскрытом системой откачивающих скважин. Фильтрационное течение считается стационарным, однофазным, напорно-безнапорным.

В **п. 3.1** дается постановка задачи. Задача решается в области $G \subset D$. Область D представляет собой пласт, ограниченный кровлей, подошвой, боковыми поверхностями и поверхностями интервалов вскрытия скважин V_k. На участках Γ_1 и Γ_2 границы области D задаются граничные условия первого и второго рода. Область решения G определяется в процессе решения с учетом депрессионных поверхностей в прискважинных зонах. Участки граничных условий первого и второго рода Γ_{G1}, Γ_{G2} определяются положением верхней границы $\Gamma_{нб}$ области G, при этом $\Gamma_{нб} \subset \Gamma_{G2}$, $\Gamma_{нб} = \Gamma_{н} + \Gamma_{б}$, где $h > z$ на $\Gamma_{н}$ и $h = z$ на $\Gamma_{б}$. Решается следующая задача: область G и поле напора h в G определяются из решения уравнения

$$\operatorname{div} K \operatorname{grad} h = 0 \text{ в } G \qquad (3.1)$$

при граничных условиях

$$h = h_{г} \text{ на } \Gamma_{G1}, \qquad (3.2)$$

$$-K\,\partial h / \partial n = q_{\Gamma n} \text{ на } \Gamma_{G2}, \qquad (3.3)$$

$$h > z \text{ на } \Gamma_{н},\ h = z \text{ на } \Gamma_{б},\ \Gamma_{н} + \Gamma_{б} = \Gamma_{нб} \subset \Gamma_{G2}, \qquad (3.4)$$

$$-\int_{S_k} K\,\partial h / \partial n\, ds = Q_k \text{ при } h|_{S_k} = \text{const} \text{ или } h|_{S_k} = H_k,\ k = 1,\dots,N, \qquad (3.5)$$

где K - коэффициент фильтрации, $h_{г}$ и H_k - заданные напоры, $q_{\Gamma n}$ - заданное значение нормальной составляющей скорости фильтрации, S_k - суммарная поверхность интервалов вскрытия k-ой скважины, Q_k - расход k-ой скважины, N - число скважин.

В **п. 3.2** строится итерационный алгоритм для решения задачи напорно-безнапорной фильтрации жидкости, основанный на методе декомпозиции области, аналогичном изложенному в **п. 1.4**. В каждой прискважинной подобласти решение представляется в виде суммы двух решений. Одно решение определено на сгущающейся сетке, другое - на дополнительных грубых сетках. Независимо решаются системы уравнений для сгущающихся участков сетки, затем совместно решается система уравнений для основной и дополнительных грубых сеток. При решении уравнений для сгущающихся участков сетки определяются части верхней поверхности, на которой $h < z$, уточняются координаты z депрессионной поверхности из условия $z = h$, и все сетки перестраиваются от депрессионной поверхности. На дополнительных грубых сетках режим фильтрации считается напорным.

В **п. 3.3** приводятся результаты численных экспериментов. Задачи решались на многопроцессорной вычислительной системе МКВС-Е112. Результаты расчетов показали, что с возрастанием числа сгущающихся участков сетки увеличивается разница во времени решения задачи по алгоритму без декомпозиции области и по предложенному алгоритму с декомпозицией области даже на однопроцессорном компьютере. На рис. 1 приведены графики, показывающие зависимость времени решения задачи от числа процессоров и числа сгущающихся участков сетки.

Рисунок 1. Расчетное время решения задачи.

В **четвертом разделе** рассматривается задача двухфазной фильтрации жидкости. При решении задач двухфазной фильтрации на каждом временном шаге приходится определять поля давления и насыщенности. Для решения сеточных систем уравнений по давлению и насыщенности используются два различных метода декомпозиции области: первый метод - для решения сеточных уравнений по давлению, второй - для решения сеточных уравнений по насыщенности. Метод декомпозиции сеточной системы уравнений для давления описан в **п. 1.4.** Для решения уравнений по насыщенности предлагается метод декомпозиции области, основанный на сочетании элементов явной и неявной схем. Декомпозиция явных схем не представляет трудностей, но из-за наличия ячеек, соизмеримых по размеру с диаметром скважин, требуется маленький шаг по времени, что приводит к большим вычислительным затратам. Декомпозиция неявных схем требует использования предиктор-корректор процедуры. В предлагаемом алгоритме на каждом временном шаге сеточные уравнения по насыщенности для сгущающихся участков решаются независимо по неявным схемам. Согласование полученных решений достигается за счет сочетания элементов явной и неявной схем в определении насыщенности ячеек, примыкающих к сгущающимся участкам.

В **п. 4.1** описывается схема метода решения уравнения насыщенности, основанного на декомпозиции области. Процесс построения алгоритма для определения насыщенности на n-ом временном шаге состоит из следующих этапов:

1) По явной схеме вычисляются фазовые расходы, выходящие из ячеек грубой сетки, окружающих ячейки сгущающихся участков прискважинных зон.

2) Определяются насыщенности по неявной схеме для ячеек сгущающихся участков, при этом фазовые расходы, входящие в прискважинные зоны, являются граничными условиями при решении указанных систем.
3) По неявной схеме вычисляются фазовые расходы, выходящие из ячеек сгущающихся участков в грубые ячейки.
4) Подправляются насыщенности для ячеек грубой сетки.

В данном алгоритме насыщенности для ячеек сгущающихся участков вычисляются независимо по неявным схемам. Ячейки грубой сетки делятся на две группы. Для ячеек, окруженных грубыми ячейками, насыщенности вычисляются по явным схемам, для ячеек, примыкающих к ячейкам сгущающихся участков, насыщенности вычисляются с использованием элементов явной и неявной схем.

В **п. 4.2** дается постановка и строится алгоритм решения задачи двухфазной фильтрации. Рассматривается двухфазная изотермическая фильтрация нефти и воды, подчиняющаяся линейному закону Дарси. Считается, что нефть и вода несжимаемы, гравитационные и капиллярные силы не учитываются. Система уравнений двухфазной фильтрации несжимаемой жидкости записывается в виде

$$\mathrm{div}((K_o + K_w)\mathrm{grad}p) = 0, \tag{4.1}$$

$$\mathrm{div}(q_w) + m\partial S_w / \partial t = 0 \tag{4.2}$$

при граничных условиях

$$p = p_\Gamma \text{ на } \Gamma_1, \tag{4.3}$$

$$-(K_o + K_w)\partial p / \partial n = q_{\Gamma n} \text{ на } \Gamma_2, \tag{4.4}$$

$$p|_{\partial V_k} = P_k,\ k = 1,\ldots,N, \tag{4.5}$$

$$S_w = S_{w_\Gamma} \text{ на } \Gamma_3 \tag{4.6}$$

и начальном условии

$$S_w = S_w^0 \text{ в } D, \tag{4.7}$$

где p = p(x,y,z) – давление, v_n - вектор скорости фильтрации вытесняющей жидкости (воды), $q = -(K_o + K_w)\mathrm{grad}p$ - вектор скорости фильтрации, S_o - нефтенасыщенность, S_w - водонасыщенность, $S_o + S_w = 1$, $K_o = K_o(S_w) = kf_o / \mu_o$, $K_w = K_w(S_w) = kf_w / \mu_w$ - фазовые подвижности, $f_w = f_w(S_w)$, $f_o = f_o(S_o)$ - относительные фазовые проницаемости, k – абсолютная проницаемость, μ_o, μ_w - динамические вязкости фаз, m – пористость, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ - внешняя граничная поверхность области D, Γ_3 - часть поверхности Γ, через которую жидкость поступает в пласт, ∂V_k - поверхность интервала вскрытия k-ой скважины, P_k - заданное давление на k-ой скважине, $q_{\Gamma n}$ - заданное значение нормальной составляющей вектора скорости фильтрации, N - число добывающих скважин. На n-ом временном шаге поле давлений p^n вычислялось по методу декомпозиции области, описанному в **п. 1.4**. Для нахождения насыщенности применялся метод декомпозиции области, описанный в **п. 4.1**.

В **п. 4.3** приводятся результаты численных экспериментов. Брался десятислойный пласт с различными толщинами слоев и абсолютными проницаемостями. Кровля пласта считалась непроницаемой, на боковых поверхностях, подошве пласта и на скважинах задавалось давление. Начальная насыщенность $S_o = 1$, на боковой поверхности $S_w = 1$, на подошве $S_o = 1$. Относительные фазовые проницаемости брались линейными функциями от насыщенностей.

Аппроксимация систем уравнений проводилась методом контрольных объемов. При решении системы алгебраических уравнений для определения поля давлений использовался метод сопряженных градиентов с предобуславливающей матрицей, построенной с помощью неполного разложения Холесского. При решении системы алгебраических уравнений для определения насыщенности для ячеек сгущающихся участков сетки использовался метод Зейделя.

Задачи решались на многопроцессорной вычислительной системе МКВС-Е112. На рис. 2 приведены результаты решения задачи без декомпозиции области на одном процессоре и с декомпозицией области по предложенному алгоритму. Показана эффективность алгоритма при решении задач с большим числом сгущающихся участков сетки по сравнению с решением без декомпозиции области.

Рисунок 2. Расчетное время решения с декомпозицией области по давлению и насыщенности.

В **пятом разделе** предложенные методы декомпозиции области для определения поля давления и насыщенностей применяются в случае трехфазной фильтрации. Рассматривается фильтрация нефти, воды и газа в пласте с различным числом гидродинамически несовершенных скважин.

В **п. 5.1** дается постановка задачи. Рассматривается трехфазная изотермическая фильтрация нефти, воды и газа, подчиняющаяся линейному закону Дарси. Считается, что нефть и вода несжимаемы, отсутствует массообмен между нефтяной и газовой фазами. Гравитационные и капиллярные силы не учитываются. Насыщенности в пласте в начальный момент времени считаются известными. На внешней поверхности пласта задаются граничные условия 1-го или 2-го рода для давления и известные насыщенности фаз на участках внешней поверхности, через которые поступают флюиды. На скважинах задаётся забойное давление.

В **п. 5.2** строится алгоритм решения задачи для определения поля давлений и насыщенностей в пласте, основанный на методах декомпозиции области, изложенных ранее. Один метод - для решения уравнений по давлению, другой - для решения уравнений по насыщенности.

В **п. 5.3** приводятся результаты численных экспериментов. Задачи тестировались на многопроцессорной вычислительной системе МКВС-Е112. На рис. 3 приведены результаты решения в случае, когда задача решалась с декомпозицией области по предложенному алгоритму и без декомпозиции области. Показана эффективность предложенного алгоритма при решении задач с большим числом сгущающихся участков сетки по сравнению с решением без декомпозиции.

Рисунок 3. Расчетное время решения с декомпозицией области по давлению и насыщенностям.

В **заключении** приводятся основные результаты работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Разработаны новые методы декомпозиции области для численного решения трехмерных задач фильтрации жидкости в нефтяных и водоносных пластах вскрытых системой скважин. Один метод – для определения поля давления, другой – для определения поля насыщенности.

2. Построены и реализованы на многопроцессорных вычислительных системах алгоритмы, основанные на предложенных методах декомпозиции области, для решения поставленных задач фильтрации жидкости.

3. Показано, что при большом числе сгущающихся участков сетки алгоритмы, построенные с использованием методов декомпозиции области, являются более эффективными, чем алгоритмы без декомпозиции области, даже на однопроцессорном компьютере.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Цепаев А.В. Один из алгоритмов метода разделения области для решения уравнения фильтрации с использованием принципа суперпозиции // Тезисы докладов IV научно-практической конференции молодых ученых и специалистов Республики Татарстан. - Казань, 2001. - С. 55

2. Цепаев А.В. К решению задач фильтрации несжимаемой жидкости в трехмерных пластах с гидродинамически несовершенными скважинами / П.А. Мазуров, А.В. Цепаев // Тезисы международной конференции по вычислительной механики и современным прикладным программным системам. - Москва-Истра, 2001. - С. 251.

3. Цепаев А.В. К решению задач фильтрации несжимаемой жидкости в трехмерных пластах с гидродинамически несовершенными скважинами / П.А. Мазуров, А.В. Цепаев // Математическое моделирование. - 2002. - Т.14. - №9. - С. 121-123.

4. Цепаев А.В. Метод суперпозиции для решения задач фильтрации жидкости в трехмерных пластах с гидродинамически несовершенными скважинами / П.А. Мазуров, А.В. Цепаев // Современные проблемы гидрогеологии и гидрогеомеханики. Сб. докл. конф. - СПб., 2002. - С. 471-476.

5. Цепаев А.В. Использование принципа суперпозиции и радиальных потоков в решении трехмерных задач фильтрации с большим числом скважин / П.А. Мазуров, А.В. Цепаев // Тезисы международной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением». - Казань, 2002. - С.269.

6. Цепаев А.В. Решение трехмерных задач фильтрации жидкости с большим числом гидродинамически несовершенных скважин на многопроцессорных вычислительных системах / П.А. Мазуров, А.В. Цепаев // Тезисы

Всероссийской конференции «Высокопроизводительные вычисления и технологии». - Ижевск, 2003. - С. 55

7. Цепаев А.В. Метод решения нелинейных задач фильтрации жидкости в трехмерных пластах с гидродинамически несовершенными скважинами / П.А. Мазуров, А.В. Цепаев // Математическое моделирование. - 2004. - Т.16. - №3. - С. 33-42.

8. Цепаев А.В. Решение трехмерных задач фильтрации жидкости на МВС–1000/16 на сетках со сгущающимися участками / П.А. Мазуров, А.В. Цепаев // Актуальные проблемы механики сплошной среды. - Казань, 2004. - С 45-56.

9. Цепаев А.В. Алгоритм решения трехмерных задач напорно-безнапорной стационарной фильтрации жидкости со сгущающимися участками сетки / Д.А. Губайдуллин, П.А. Мазуров, А.В. Цепаев // Вычислительные методы и программирование. - 2005. – Т.6. - №2. – С. 217 – 225.

10. Цепаев А.В. Алгоритмы для распараллеливания решения задач двухфазной фильтрации жидкости на сетках со сгущающимися участками / П.А. Мазуров, А.В. Цепаев // Вычислительные методы и программирование. - 2006. – Т.7. - №2. – С. 115 – 123.

11. Цепаев А.В. Алгоритмы для распараллеливания решения задач двухфазной фильтрации жидкости на сетках со сгущающимися участками / П.А. Мазуров, А.В. Цепаев // Тезисы международного семинара «Супервычисления и математическое моделирование». - Саров, 2006. -С. 56.

12. Цепаев А.В. Алгоритмы распараллеливания на сгущающихся сетках в задачах трехфазной фильтрации жидкости / Д.А. Губайдуллин, А.И. Никифоров, А.В. Цепаев // Вычислительные методы и программирование. – 2007. – Т.8. - №2. – С. 360 – 366.